

2019~2020学年天津和平区天津市耀华中学高二下学期期中数学试卷

一、选择题

(本大题共10小题, 每小题4分, 共40分)

1. 函数 $y = x + \frac{3}{x} + 2 \ln x$ 的单调递减区间是 ().

- A. $(-3, 1)$ B. $(0, 1)$ C. $(-1, 3)$ D. $(0, 3)$

2. 设 $z = \frac{10i}{3+i}$, 则 z 的共轭复数为 ().

- A. $-1+3i$ B. $-1-3i$ C. $1+3i$ D. $1-3i$

3. 4位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动, 则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为 ().

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{7}{8}$

4. 若函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + a \ln x$ 有两个不同的极值点, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $a > 1$ B. $-1 < a < 0$ C. $a < 1$ D. $0 < a < 1$

5. 函数 $f(x) = x^3 - ax^2 - bx + a^2$ 在 $x = 1$ 处有极值10, 则点 (a, b) 为 ().

- A. $(3, -3)$ B. $(-4, 11)$
C. $(3, -3)$ 或 $(-4, 11)$ D. 不存在

6. 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}$ 在区间 $(a, a+5)$ 上存在最小值, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $[-5, 0)$ B. $(-5, 0)$ C. $[-3, 0)$ D. $(-3, 0)$

7. 设函数 $f(x) = ax^3 - x + 1 (x \in \mathbf{R})$, 若对于任意 $x \in [-1, 1]$ 都有 $f(x) \geq 0$, 则实数 a 的取值范围为 ().

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[0, +\infty)$ C. $[0, 2]$ D. $[1, 2]$

8. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$, 若过点 $M(3, t)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 则实数 t 的取值范围是 ().

- A. $(-9, 18)$ B. $(-18, 18)$ C. $(-18, 6)$ D. $(-6, 6)$

9. 已知函数 $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $g(x) = ax - \ln x$, 若对 $\forall x \in (0, e)$, $\exists x_1, x_2 \in (0, e)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x) = g(x_i) (i = 1, 2)$, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $\left(\frac{1}{e}, \frac{6}{e}\right)$ B. $\left[\frac{1}{e}, e^{\frac{7}{4}}\right)$
C. $\left[\frac{6}{e}, e^{\frac{7}{4}}\right)$ D. $\left(0, \frac{1}{e}\right] \cup \left[\frac{6}{e}, e^{\frac{7}{4}}\right)$

10. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意实数 x , 有 $f(x) > f'(x)$, 且 $y = f(x) + 2019$ 为奇函数, 则不等式 $f(x) + 2019e^x < 0$ 的解集为 ().

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$ D. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

11. 函数 $f(x) = x^3 - 3x (x \in [-2, 3])$ 的最大值为 _____ .

12. 复数 z 满足 $\frac{1+z}{1-z} = i$, 则 $|z| =$ _____ .

13. 6名同学站成一排, 甲、乙两人相邻, 丙与丁不相邻, 则共有 _____ 种不同的排法. (用数字作答)

14. 从一张长为16cm, 宽为10cm的矩形纸板的四角截去四个相同的小正方形, 做成一个无盖的盒子, 则盒子容积的最大值为 _____ cm^3 .

15. 若从0, 1, 2, 3, 4, 5这六个数字中选3个数字, 组成没有重复数字的三位偶数, 则这样的三位数一共有 _____ 个 (用数字作答)

16. 已知函数 $f(x) = x - 1 - \ln x$, 对定义域内的任意 x 都有 $f(x) \geq kx - 2$, 则实数 k 的取值范围是 _____ .

三、解答题

(本大题共2小题, 共30分)

17. 已知 $f(x) = e^x - ax^2$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = bx + 1$.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 求 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上的最大值.

18. 已知函数 $f(x) = x - (a + 1) \ln x$, $g(x) = -\frac{2+a}{x}$, ($a \in \mathbf{R}$) .

(1) 若 $a = 2$, 求函数 $f(x)$ 的极值.

(2) 设函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 求函数 $h(x)$ 的单调区间.

(3) 若对 $[1, e]$ 内任意一个 x , 都有 $f(x) > g(x)$ 成立, 求 a 的取值范围.